לוגיקה (1) תרגיל 8

1. תהי $L = \{f, r, \approx\}$ שפה לתחשיב היחסים (f סימן פונקציה חד-מקומי, r סימן יחס דו-מקומי). יהי $\mathfrak{A}$ המודל ל-L המוגדר ע"י: (כאשר אנו מסמנים: את העולם של $\mathfrak{A}$ ב-$|\mathfrak{A}|$, וכן $\mathfrak{A}(f) = f^{\mathfrak{A}}$ ובאופן דומה $\mathfrak{A}(r) = r^{\mathfrak{A}}$).

   - $|\mathfrak{A}| = \{1, 2, 3, 4\}$.
   - $f^{\mathfrak{A}}(1) = 2$, $f^{\mathfrak{A}}(2) = 3$, $f^{\mathfrak{A}}(3) = 3$, $f^{\mathfrak{A}}(4) = 3$.
   - $r^{\mathfrak{A}}(x, y) = T$ אםם $(x, y) \in \{(1,1), (2,3), (3,3), (3,4), (4,3)\}$.

   לכל אחד מהפסוקים הבאים, ϕ קבע את ערך האמת שלו ב-$\mathfrak{A}$:

   (א) $\phi = \exists x[f(x) \approx x \wedge r(x, x)]$
   (ב) $\phi = \forall x \exists y[f(y) \approx x \vee r(x, y)]$.
   (ג) $\phi = (\exists x) r(f(x), f(f(x)))$.
   (ד) $\phi = \forall x[\neg r(f(x), x)] \wedge \exists x[r(x, f(x))]$

2. תהי $L = \{<, *\}$ שפה לתחשיב היחסים ($*$ סימן פונקציה דו-מקומי, $<$ סימן יחס דו-מקומי). נרשום: $x * y$ במקום $*(x, y)$ וכן $x < y$ במקום $<(x, y)$. יהי $A = \{1, 2, 3\}$. לכל אחד מהפסוקים הבאים ϕ, הגדר מבנה $\mathfrak{A}$ לשפה L שעולמו A כך ש-$val(\mathfrak{A}, \phi) = T$.

   (א) $\phi = \exists x \exists y[x < y \wedge y < x \wedge x * x < y]$.
   (ב) $\forall x \forall y[x < y \to y < x]$.
   (ג) $\forall x \forall y(x * y < y * x)$.

3. תהי L שפה לתחשיב היחסים, ויהיו $\phi(x_1, ..., x_n)$ ו-$\psi(x_1, ..., x_n)$ נוסחאות בשפה L עם משתנים חפשיים מבין $\{x_1, ..., x_n\}$. נסמן $\psi \models \phi$ אם לכל מבנה $\mathfrak{A}$ מתאים ל-L והשמה s למשתנים $x_1, ..., x_n$ מתקיים:
   $val(\mathfrak{A}, s, \psi) = T \Rightarrow val(\mathfrak{A}, s, \phi) = T$. נסמן $\psi \equiv \phi$ אםם $\psi \models \phi$ וגם $\phi \models \psi$.
   נניח $L = \{r, s, c\}$ (r, s סימני יחס חד מקומיים, c קבוע אישי). הוכיחו או הפריכו:

   (א) $\forall x\,[r(x)] \models r(c)$
   (ב) $\exists x\,[r\,(x) \wedge s\,(x)] \equiv \exists x\,[r\,(x)] \wedge \exists x\,[s(x)]$
   (ג) $r\,(x) \wedge s\,(y) \equiv r\,(y) \wedge s\,(x)$
   (ד) $\exists x \exists y[r\,(x) \wedge s\,(y)] \equiv \exists x \exists y[r\,(y) \wedge s\,(x)]$

4. תהי $L = \{f, \approx\}$ שפה לתחשיב היחסים (f סימן פונקציה חד-מקומי). רשום פסוק ϕ בשפה L כך שלכל קבוצה A, יש ל-ϕ מודל שעולמו A אםם A קבוצה אינסופית. (רמז - קבוצה היא אינסופית אםם יש עליה פונקציה חח"ע שאיננה על).

5. לכל אחת מהנוסחאות הבאות בשפה $L = \{f, r\}$ רשום מהו הטווח של כל כמת, ומהי קבוצת המשתנים החפשיים של הנוסחה. שימו לב משתנה יכול להופיע בנוסחה גם כמשתנה מכומת וגם כמשתנה חפשי.

$.\phi = \forall x \exists y \left[r(x,y) \to r(x, f(z)\right] \wedge \forall z \left[r(x, f(z))\right]$ **(א**

$.\phi = \forall x \{ r\left(x,y\right) \to \exists y \left[r\left(y,z\right) \to \forall z \left(r(z,u)\right)\right]\}$ **(ב**

$.\phi = \forall x \left(r\left(x,y\right)\right) \wedge \exists z \left(r\left(z,x\right)\right)$ **(ג**